

بسمه تعالی



دانشگاه تبریز

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۸۹/۱/۳۰

وقت : ۷۵ دقیقه

دانشکده ریاضی

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

نام مدرس:

امتحان میان ترم درس: معادلات دیفرانسیل (هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۳۸۸ - ۱۳۸۹

۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y + 3}$$

۲- اگر $y_1 = e^x$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$ باشد جواب عمومی معادله را به

دست آورید. (۱۵ نمره)

۳- جواب خصوصی مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید. (۱۵ نمره)

$$yy'' + y'^2 = 5, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را به دست آورید. (۱۵ نمره)

$$(y^2 + 4ye^x)dx + 2(y + e^x)dy = 0$$

۵- جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید. (۲۰ نمره)

$$y'' + 4y' = x + \sin x$$

موفق باشید

گروه ریاضی

حل المسألة: أسكن بين كم عدلات (المركب) فاست

$yy'' + y'^2 = 0$, $y(1) = y'(1) = 1$ مسألة ٢
 عدل مرتبة بدم وقوة x

$y' = u$, $y'' = u \frac{du}{dy}$

$y u \frac{du}{dy} + u^2 = 0$

$u^2 = v \rightarrow v u' = v'$ عدل بدم

$y \frac{v'}{v} + v = 0 \Rightarrow v' + \frac{v}{y} = 0$

$v = e^{-\int \frac{1}{y} dy} (c + \int \frac{1}{y} e^{\int \frac{1}{y} dy} dy)$

$v = \frac{1}{y^2} (c + \int 1 \cdot y dy) = \frac{c + 0.5 y^2}{y^2}$

$\Rightarrow u = y' = \frac{\sqrt{c + 0.5 y^2}}{y} \xrightarrow{y(1)=y'(1)=1} c = -1$

$y' = \frac{\sqrt{0.5 y^2 - 1}}{y} \Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{0.5 y^2 - 1}} = dx$

$\frac{1}{2} \sqrt{0.5 y^2 - 1} = x + c_1 \xrightarrow{y(1)=y'(1)=1} c_1 = \frac{1}{2}$

$\sqrt{0.5 y^2 - 1} = 2x + 1$

$\Rightarrow \boxed{0.5 y^2 - (2x + 1)^2 = 1}$

$(y' + \epsilon y e^x) dx + (y + e^x) dy = 0$ مسألة ٢

$M_y = \epsilon y + \epsilon e^x$ $N_x = \epsilon e^x$

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\epsilon y + \epsilon e^x}{\epsilon (y + e^x)} = 1$ عدل بدم

$\mu = e^x$ عدل

$(y' e^x + \epsilon y e^{x+1}) dx + (\epsilon y e^x + \epsilon e^{x+1}) dy = 0$

عدل بدم

$\boxed{y^2 e^x + \epsilon y e^{x+1} = c}$

$y' = \frac{x+y+1}{x-y+2}$ $\begin{cases} x = X+m \\ y = Y+n \end{cases}$ مسألة ١

$\Rightarrow Y' = \frac{X+Y+(m+n+1)}{X-Y+(m-n+2)}$ $\begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow Y' = \frac{X+Y}{X-Y}$, $Y = Xu$

$u + Xu' = \frac{1+u}{1-u} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2} du$

$\ln x + c = \text{Arctg } u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2)$

$c = \text{Arctg } u - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x^2 u^2)$

$c = \text{Arctg } \frac{Y}{X} - \frac{1}{2} \ln(X^2 + Y^2)$

$\boxed{c = \text{Arctg } \frac{y-1}{x+1} - \frac{1}{2} \ln((x+1)^2 + (y-1)^2)}$

$y' = e^{-x} y' + y - e^x$, $y_1 = e^x$ مسألة ٢

$y = e^x + \frac{1}{v}$ عدل بدم

$e^n - \frac{v'}{v^2} = e^{-n} (e^{rn} + \frac{re^n}{v} + \frac{1}{v^2}) + (e^n + \frac{1}{v}) - e^n$

$\frac{-v'}{v^2} = \frac{e^{-n}}{v^2} + \frac{r}{v} \Rightarrow v' + r v = -e^{-n}$

$v = e^{-\int r dx} (c + \int -e^{-n} e^{\int r dx} dx)$

$v = e^{-rx} (c - \int e^{rx} dx)$

$v = c e^{-rx} - \frac{1}{r} e^{-x}$

$y = e^x + \frac{1}{c e^{-rx} - \frac{1}{r} e^{-x}}$

$\boxed{y = e^x \left(1 + \frac{r}{c e^{-rx} - 1} \right)}$

$$y'' + \varepsilon y' = x + \sin x \rightarrow m' + \varepsilon m = 0 \rightarrow m = 0, m_c = -\varepsilon$$

0.10

$$\rightarrow y_h = A + B e^{-\varepsilon x}$$

$$y_p = x(ax+b) + (c \sin x + d \cos x) \rightarrow$$

$$\rightarrow (a - (c \sin x + d \cos x)) + (1ax + \varepsilon b) + (f c \cos x - \varepsilon d \sin x) = x + \sin x$$

$$\begin{cases} 1a = 1 \\ ra + \varepsilon b = 0 \end{cases}, \begin{cases} -c - \varepsilon d = 1 \\ -d + f c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{1} \\ b = \frac{-1}{19} \end{cases}, \begin{cases} c = \frac{-1}{14} \\ d = \frac{-\varepsilon}{14} \end{cases}$$

$$y_g = A + B e^{-\varepsilon x} + \frac{x}{19}(rx-1) - \frac{1}{14}(\sin x + f \cos x)$$